

四庫全書

子部

欽定四庫全書

歷算全書卷五十二

宣城梅文鼎撰

三角法舉要卷三

內容外切

三角測量之用在邊與角而其內容外切亦所當明故次于算例之後

內容有二曰本形曰他形

一三角求積

積謂之冪亦謂之面乃本形所有

一 三角容員

一 三角容方

以上皆形內所容之他形

外切惟一

一 三角形外切之員

三角求積第一術

底與高相乘折半見積

內分二支

一句股形即以句股為底為高

一銳角鈍角形任以一邊為底而求其垂線為高

假如句股形甲乙股

一十尺

乙丙句

三十尺

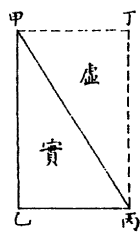
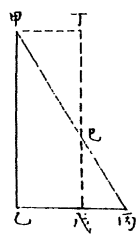
求積

術以甲乙股乙丙句相乘

四千二百尺

折半得積

凡求得句股形積二千一百尺



如圖甲乙股與乙丙句相乘成甲

乙丙丁長方形其形半實半虛故

折半見積

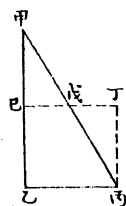
或以句折半十七尺半乘股亦得積二千

尺一百

如圖乙丙句折半於戊以乙戊乘

甲乙成甲乙戊丁形是移丙戊已

補甲丁已也



補戊丁丙也

右句股形以句為底以股為高若以股為底則句又為高可互用也

句股形有立有平若平地句股以句為濶以股為長

或以股折半六十乘句亦得積二千

尺一百

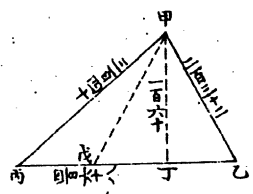
如圖甲乙股折半於巳以巳乙乘乙丙成巳乙丙丁形是移甲巳戊

其理無二

論曰凡求平積皆謂之罽其形如網目又似窓櫺之空
皆以橫直相交如十字亦如機杼之有經緯而成布帛
故句股是其正法何也句股者方形斜剖之半也折半
則成正剖之半方形矣其他銳角鈍角或有直無橫有
橫無直必以法求之使成句股然後可算故句股者三
角法所依以立也

假如銳角形甲乙邊
二百三 甲丙邊
三百四 乙丙邊
四百

六十
 八尺 求積



術先求垂線用銳角第三術任以

乙丙邊為底以甲丙甲乙為兩弦

兩弦之較數一百零八尺 總數五百七十二尺

相乘六萬一千七百七十六尺 為實以乙丙底

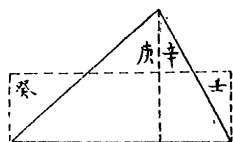
為法除之得數一百三十二尺 轉減乙丙餘數三百三十六尺 半之得

乙丁一百六十八尺 依句股法以乙丁自乘二萬八千二百二十四尺 與甲

乙自乘 五萬三千八百二十四尺 相減餘數 二萬五千六百尺 平方開之得

甲丁垂線 一百六十尺 以甲丁垂線折半乘乙丙底得積

凡求得銳角形積三萬七千四百四十尺



如圖移辛補壬移庚補癸則成長

方形即垂線折半乘底之積

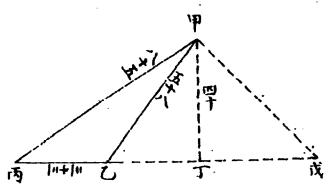
右銳角形任以乙丙邊為底取垂

線求積若改用甲乙或甲丙邊為

底則所得垂線不同而得積無異故可以任用為底

假如鈍角形甲乙邊

五十八步 甲丙邊 八十五步 乙丙邊 三十三步 求積



術求垂線立於形外用鈍角第三

術以乙丙為底甲乙甲丙為兩弦

總數 一百四十三步 較數 二十七步 相乘 三千八百

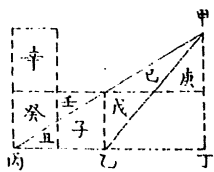
六十為實乙丙底為法除之得數

一百一十七步 內減乙丙餘數 八十四步 折半

四十為乙丁 即乙丙引長邊 依句股法乙丁自乘 一千七百六十四步 甲

乙自乘 三千三百六十四步 相減餘數 一百六十六步 平方開之得甲丁

四十步 為形外垂線以乙丙底折半^{十六步半}乘之得積



凡求得鈍角形積六百六十步

如圖甲乙丙鈍角形移戊補庚移

庚已補壬癸又移壬子補辛成辛

癸丑長方即乙丙底折半乘中長

甲丁之積

右鈍角形以乙丙為底故從甲角作垂線若以甲乙

為底則自丙角作垂線亦立形外而垂線不同然以

之求積並同若以甲丙為底從乙角作垂線則在形
內如銳角矣其垂線必又不同而其得積無有不同
故亦可任用一邊為底

凡用垂線之高乘底見積必其線上指天頂底線之
橫下應地平兩線相交正如十字故其所乘之冪積
皆成小平方可以虛實相補而求其積數鈍角形引
長底線以作垂線立於形外則兩線相遇亦成十字
正方之角矣

總論曰三角形作垂線於內則分兩句股鈍角形作垂
線於外則補成句股皆句股法也

三角求積第二術

以中垂線乘半周得積謂之以量代算

假如鈍角形乙丙邊

五十八步

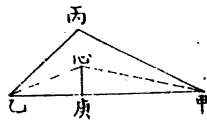
甲乙邊

一百一十七步

甲丙邊

八十五步

求積



術平分甲乙兩角各作線會于心從

心作十字垂線至乙甲邊

如心庚

即中

垂線也乃量取中垂線

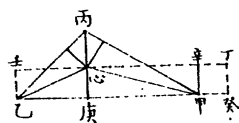
心庚得數

八十八步

合計三邊而半之

一百三十步

為半周以半周乘中垂線得積



凡求得鈍角形積二千三百四十步

又術如前取中垂線庚心為濶半周為

長如乙癸及丁壬別作一長方形如乙壬即

與甲乙鈍角形等積

解曰凡自形心作垂線至各邊皆等故中垂線乘半周

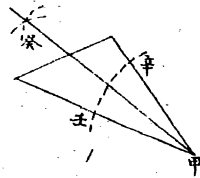
為一切有法之形所公用方員及五等面六等面至十

等面以上並同故以中垂線為濶半周為長其所作長

方形即與三角形等積

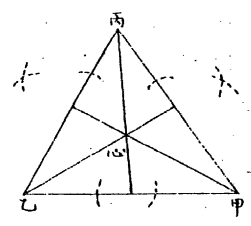
又解曰中垂線至邊皆十字正方角即分各邊成句股形以乘半周得積即句股相乘折半之理

附分角術 有甲角欲平分之



術以甲角為心作虛半規截角旁兩線得辛壬二點乃自辛自壬各用為心作弧線相遇于癸作癸甲線即分此角為兩平分

三角求心術



如上分角術於甲角平分之于乙角
 又平分之兩平分之線必相遇成一
 點此一點即三角形之心
 解曰試再於丙角如上法分之則亦
 必相遇於原點

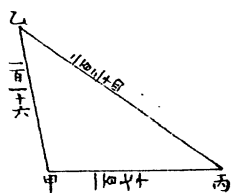
三角求積第三術

以三較連乘又乘半總開方見積

假如鈍角形甲乙邊

一百一十六尺 甲丙邊一百七十尺 乙丙邊二百

三十求積四尺



術合計三邊而半之

二百六十尺

為半總

以與甲乙邊相減得較一十四尺與甲

丙邊相減得較九十尺與乙丙邊相減

得較六十三較連乘數又以兩較相乘得

又以餘一較

乘之得數三十三萬六千九百六十尺又以半總較之得數八千七百六十

萬零九千六百尺平方開之得積

凡求得鈍角形積九千三百六十尺

若係銳角同法

解曰此亦中垂線乘半周之理但所得為冪乘冪之數

故開方見積詳或問

三角容員第一術

以弦與句股求容員徑

此術惟句股形有之凡句股相併為和以和與弦併為弦

和和以和與弦相減為弦和較

假如甲乙丙

句股形甲丙句

二十步乙甲股二十步乙丙弦

二十步九步求容員徑

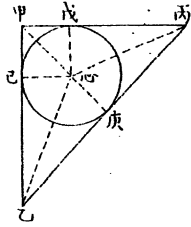
術以句股和

四十一

與弦相減得數為容員徑

凡求得內容員徑一十二步

解曰此以弦和較為容員徑



如圖從容員心作半徑至邊又作

分角線至角成六小句股形則各

角旁之兩線相等
如丙戊丙庚兩線在丙角旁則

相等乙庚乙己在乙角旁甲戊
甲己在甲角旁並兩線相等

其在正方角旁者
甲甲戊乃弦和較也
庚于乙丙弦內分丙

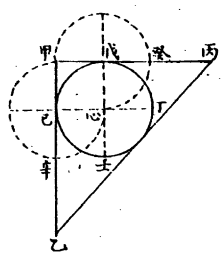
乙庚以對乙己則其餘為甲戊及甲己
此即句股和與乙丙弦相較之數也
 然即為內容員

徑何也各角旁兩線並自相等而正方角旁之兩線又

皆與容員半徑等
正方角旁兩小形之角皆平分方角之半則句股自相等而甲戊等心戊

甲巳等然則弦和較者正方角旁兩線甲戊甲巳之合即容

員兩半徑心巳心巳之合也故弦和較即容員徑也



試以甲戊為半徑作員則戊心亦

半徑而其全徑甲癸戊與容員徑心丁

巳等以甲巳為半徑作員則巳心

亦半徑而其全徑甲辛巳與容員徑

壬戊心亦等

三角容員第二術

以周與積求容員徑

內分二支

一句股形以弦和和為用亦可
用半

一銳角鈍角形以全周半周為用

假如 甲乙丙 句股形甲丙句一十
六步 甲乙股三十
步 乙丙弦

三十
四步 求容員徑

術以句股相乘得數四百八
十步 為實併句股弦數共八
十步 為

法除之得數倍之為容員徑

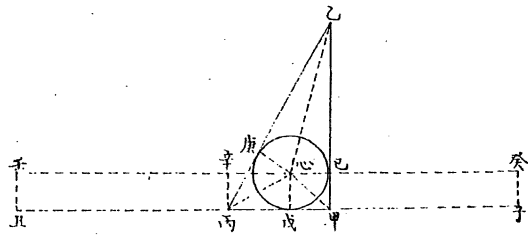
凡求得容員徑一十二步

解曰此以弦和和除句股倍積得容員半徑也

如圖從容員心作對角線分其形為三

一甲心丙一甲
心乙一丙心乙

乃於甲丙句線兩端各引長之截子甲如乙甲股截丙
丑如丙乙弦則子丑線即弦和和也乃自員心作癸壬
直線與丑子平行兩端各聯之成長方又作辛丙線分
為三長方形其濶並如員半徑其長各如句如股如弦



而各為所分三小形之倍積甲方辛

如甲丙句之長而以心戊半徑為

濶即為甲心丙分形之倍甲癸長

方如乙甲股之長而以同心己之

半徑為濶即為乙心甲形之倍丙

壬長方如丙乙弦之長而以同心

庚之半徑為濶即為乙心丙形之

倍合之即為本形倍積與句股相

乘同也句股相乘為倍積見求積條故以弦和

和除句股相乘積得容員半徑

假如甲乙丙句股形甲丙句八尺甲乙股一百零五尺乙丙

弦一百三十七尺求容員徑

術以句股相乘而半之得積四千六百二十尺為實併句股弦

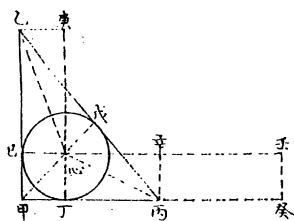
數而半之一百六十五尺為法除之得數倍之為容員徑

凡求得內容員徑五十六尺

解曰此以半周除句股形積而得容員半徑也半周即弦和和

之半

如圖從容員心分本形為六小句股則同角之句股各



相等可以合之而各成小方形同甲

兩句股成丁巳小方形同丙角之兩句股可合之成丁辛長方形以心辛

丙形等丙戊心也同乙角之兩句股可合之成巳庚長方形以乙庚心形

等心戊乃移巳庚長方為辛癸長方

則癸甲即同半周而癸巳大長方即

為半周乘半徑而與句股積等也 六小形之句皆原形之周變為長方則兩

兩相得而各用其半是半周也癸甲及壬巳之長並半周壬癸及巳甲辛丙之間並同心丁是半周乘半徑也

辛癸長方與巳庚等積即與乙角旁兩句股等積又丁辛長方與丙角旁兩句股等積再加丁巳形即與原設

乙甲丙句股形等積矣。然則以句股相乘而半之者，句股形積也。

故以半周除之，即容員半徑矣。

或以弦和和除四倍積，得容員全徑，並同前論。

論曰：句股形古法以弦和較為容員徑，與弦和和互相乘除，乃至精之理。測員海鏡引伸其例，以為測望之用。其變甚多，三角容員蓋從此出，故為第一支。

假如甲乙丙銳角形乙丙邊五尺甲丙邊七尺甲乙邊

六十尺求容員徑

術以乙丙邊為底求得甲丁中長線六十尺法見求積以乘底

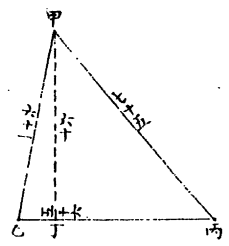
得數三千三百六十尺倍之六千七百二十尺為實合計三邊共一百九十二

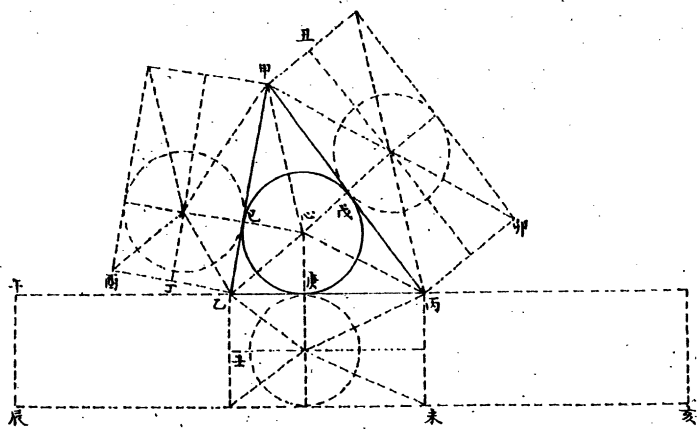
尺為法除之得容員徑

凡求得內容員徑三十五尺

解曰此以全周除四倍積得容員

徑也





如圖自容員心作對角線分為

小三角形三各以員半徑為高

各邊為底若於各邊作長方而

各以邊為長半徑為濶必倍大

於各小三角形 如壬丙長方倍大于丙心乙形

丙丑長方倍大于丙心甲形 甲丁長方倍大于甲心乙形 又

作加一倍之長方則四倍大於

各小三角 如未乙長方倍大于丙壬長方必四倍于

丙心乙三角則卯甲亦四倍于丙
心甲而甲酉亦四倍于甲心乙
於是而通為一大長

方移卯甲長方為亥丙移甲酉為乙辰則成亥午大長方形矣必四倍原形之冪而

以三邊合數為長以容員之徑為濶然則以中長線乘
底而倍之者正為積之四倍也以三邊除之豈不即得
員徑乎

或以全周除倍積得容員半徑

或以半周除積得容員半徑並同

若鈍角形亦同上法

論曰銳角鈍角並以周為法此與句股形用弦和同
但必先求中長線故為第二支

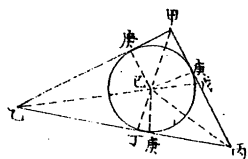
三角容員第三術

以中垂線為員半徑曰以量代算

假如甲乙丙

三角形求容員徑

既不用算故不言邊角之數



如求積術均分甲乙二角之度各

作虛線交於巳即巳為容員之心

次以巳為心儘一邊為界運規作

員此員界必切三邊

於是從巳心向三邊各作十字垂線必俱在切員之點

而等為員半徑知半徑知全徑矣半徑各如已庚線

論曰此容員心即三角形之心故以容員半徑乘半總即得積也

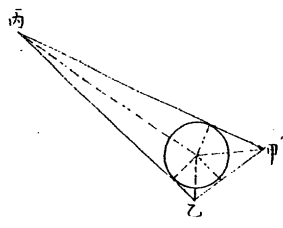
又案此術亦句股及銳鈍兩角通用

三角容員第四術

用三較連乘

假如甲乙丙 鈍角形 乙丙邊 四百三十二尺 甲丙邊 五百尺 甲乙

邊 一百四十八尺 求容員徑



術以半總 五百四十尺 求得乙丙邊較

一百零八尺 甲丙邊較 四十二尺 乙甲邊較

三百九十二尺 三較連乘得數 一百六十九萬三千

四百四十尺 以半總除之得數 三千一百三十

六尺四因之一萬二千五百四十四尺為實平方開之得容員徑

凡求得內容員徑一百一十二尺

銳角同法

解曰此所得者為容員徑上之自乘方冪故開方得徑

三角容方第一術

合底與高除倍積得容方徑

內分二支

一 句股形即以句股為底為高

即句股和也其容方依正方角

一 三角形以一邊為底求其垂線為高

句股形以弦為底銳

角形三邊皆可為底鈍角形以大邊為底其容方並依為底之邊

假如

甲乙丙

句股形甲丙股

三十七尺

乙丙句

一十八尺

求容方

依正方角而以容方之一角切於弦

甲癸及丙卯 皆如甲丙股仍作卯癸線聯之

乃從癸作斜線至乙割甲丙股於戊則戊丙為所求容方之邊又從戊作申未橫線與上下兩線平行割甲乙弦於己則己戊為所求容方之又一邊未從己作午辛立線割丙乙句於辛則己辛及辛丙又為兩對邊而四邊相等為句股形內所容之方

解曰寅卯大長方以癸乙斜線分兩句股則相等而寅戌與戊卯兩長方等則寅丙長方與申卯長方亦等
寅

丙減寅戊而加相等
之戊卯即成申卯

夫寅丙者句股倍積而申卯者句

股和乘容方徑也

乙丙句丙卯股合之為申卯形之
長申乙及未卯並同方徑為濶

故

以句股和除倍積得容方徑

又解曰寅丙長方分兩句股而等則寅戊與午丙兩長

方等

寅已與已丙既等則于寅戊內減
寅已而加相等之已丙即成午丙

而寅戊原等戊

卯則午丙亦與戊卯等夫午丙形之丙甲與戊卯形之

丙卯皆股也則兩形等積又等邊矣其長等其濶亦等

甲丙與丙卯既等則
辛丙與戊丙亦等

而對邊悉等即成正方形

論曰此以句為底股為高也若以股為底句為高所得亦同其容方依正方角乃古法也三角以底濶合中長除積蓋生於此是為第一術之第一支

假如甲乙丙句股形乙丙弦二十八尺其積一百六十

八尺求容方依弦線而以容方之兩角切於句股

術以弦除倍積三百三十六尺得對角線一十二尺與弦相併四十四尺

為法倍積為實法除實得所求

求到容方徑八尺四寸

為容方之一邊末從庚作辰壬線從巳作午辛線並與

甲丁平行而割乙丙弦於壬於辛則辛壬及庚壬及巳

辛三線並與庚巳等而成正方

解曰寅子長方與子卯長方等積

癸丙線分寅卯形為兩句股而等則兩句

股內所作之方必等

午壬長方又與寅子等

寅丁形以甲丙線分為兩句股則寅巳與

巳丁等又丑丁形以甲乙線分為兩句股則丑庚與丁庚等若移寅巳作巳丁移丑庚作丁庚則午丁等寅戊

而辰丁等丑戌合之而午壬等寅子則午壬亦與子卯等而午壬之邊

午辛

及辰壬

子卯之邊

卯乙及未子

並等甲丁對角線則兩形

午壬子卯

等積又等邊矣其長等其濶亦等

辰壬既等卯乙則辛壬亦等子乙而庚壬

及已辛亦故四線必俱等也

又解曰寅子既與子卯等則寅乙必與申卯等

于寅乙內移寅

子居子卯之位即成申卯而寅乙者倍積也申卯者底借中長乘容

方徑也

乙丙弦也卯乙即甲丁對角中長線也合之為丙卯之長其兩端之濶申丙及未卯並同方徑

故合弦與對角線為法以除倍積得容方徑

論曰此以一邊為底中長線為高也既以一邊為底其

容方即依此一邊而以兩方角切餘二邊也句股形故

以弦為底若銳角形則任以一邊為底但依大邊則容
方轉小亦如句股形依方角之容方必大於依弦線之
容方也鈍角形但可以大邊為底其求之則皆一法也
是為第一術之第二支

三角容方第二術

以圖算

內分二支

一以法截中長線得容方徑

句股形即截其邊

一以法截兩斜邊得容方邊

句股形即截其弦

假如銳角形求容方任以一邊為底

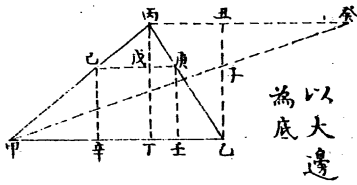
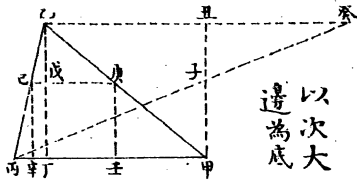
如圖以乙丙最小邊為底先從對角甲作中長垂線至

丁又從乙角作丑乙立線與甲丁平行而等乃從甲角

丁亦若甲
 丁與乙丙
 又甲戊與已庚若甲丁與乙丙
 截形必相似則甲戊與
 已庚若甲丁與乙丙

合兩比例觀之則甲戊與戊丁若甲戊與已庚而已庚

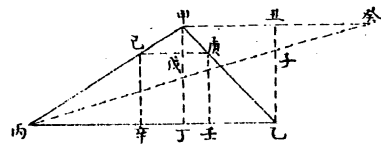
即戊丁



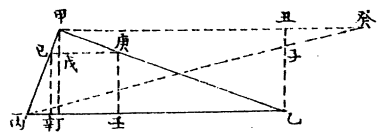
以上並銳角形

凡銳角三邊並可

為底而皆一法



假如鈍角形
求容方則惟
有大邊可為
底法同銳角



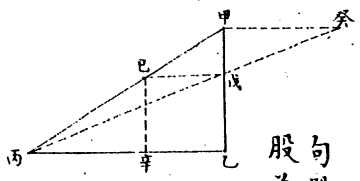
假如句股形
求容方以弦
為底法亦同
鈍銳兩角

假如句股形求容方以股為底則於句端甲作橫線與
股平行而截之於癸使癸甲如甲乙句乃自癸向丙作
斜線割甲乙句於戊則戊乙即容方之一邊末作已戊

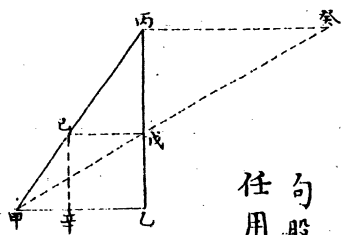
與股平行作已辛與句平行即成容方

或以句為底則從股端丙作丙

癸橫線與股等亦作癸甲斜線割丙
乙股於戊其所得容方亦同圖如左



句股形以
股為底



句股形以句為底兩者
任用其所得容方並同

論曰銳角鈍角皆截中長線為容方徑句股形以弦為

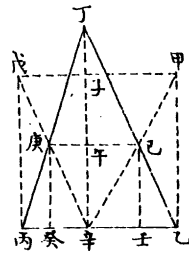
底亦然惟句股形以句為底即截其股為容方徑

用股為底

句即截不另求中長而與截中長之法並同是為第二術

之第一支

假如乙丙丁三角求容方 依乙丙邊為底



如圖以乙丙底作正方形 即甲乙丙戊方

又作丁辛對角線次作甲辛及戊

辛兩斜線割原形之兩斜線於已

於庚乃作已庚線為所求容方之

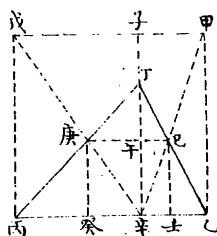
一邊

未作已壬及庚癸兩線成小方形於形內即所求

解曰甲戊與已庚若子辛與午辛也 已庚辛三角形為甲戊辛之切形則

其橫與直之比 而甲戊與子辛同為方徑而等則已庚與

午辛亦同為小方徑而等



若底上方形大則其徑亦大於對

角線則如第二圖引丁辛線至子

其理亦同

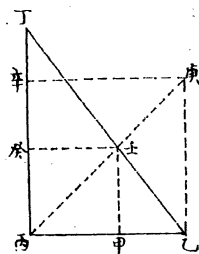
有此二法則三邊並可為底

鈍角形用大邊為底句股形用弦為底並同第二圖

若句股形以句為底求容方如圖即用乙丙句作

丙辛
庚乙

方形從方角庚向丙作斜線割丁乙弦於壬從壬作癸



壬及甲壬二線即所容方
或用上方則

引出句
 邊如股

解曰庚丙線分丙角為兩平分則

其橫直線自相等
壬癸與癸丙相等
 壬甲與甲丙

相等則四
 線皆等
 而成正方嘉禾陳礪菴用分角法求容方與

此同理

論曰此皆以底上方形為法而得所求小方也故不論

頂之偏正其所得容方並同惟句股容方依正方角則

中長線與原邊合而為一法雖小異其用不殊是為第一
二術之第二支

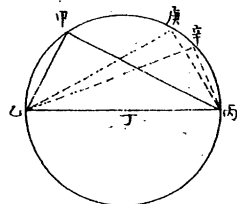
三角形外切平員第一術

句股形以弦為徑

假如甲乙丙句股形乙丙弦長四尺五寸二分求外切員

術以弦折半取心得半徑二尺二寸六分其弦長四尺五寸二分即外切平員全徑以平員周率三五五乘之徑率一一三除之得員周一十四尺二寸

如圖乙丙員徑即句股形之弦折半於丁即員心也以



論曰凡平員徑上從兩端各作直線至員周相會則成

正方角

如乙丙徑之兩端于丙于乙各作直線會于甲則甲角必為正角

而為句股形

假令兩線相遇于庚即成庚乙丙句股形于辛亦然以其皆正角故也

故不問句股長短

而並以其弦為外切員之徑

乙丁半徑為度從丁心運規作員必過甲而句股形之角皆切員周

矣

又論曰徑一百一十三而周三百五十五此鄭端清世

子所述祖冲之術也

見律呂
精義

按古率周三徑一李淳風

等釋古九章以為術從簡易舉大綱而言之誠為通論

諸家所傳徑五十周一百五十七則魏劉徽所改謂之

徽率徑七周二十二則祖冲之所定謂之密率由今以

觀冲之自有兩率

一為七與二十二一
為一一三與三五五

蓋以其捷者為

恒用之須而存其精者明測算之理亦可以觀古人之

用心矣

三角形外切平員第二術

分邊取員心內分二支並以圖算

一 句股形但分一邊即得員心 其心在弦

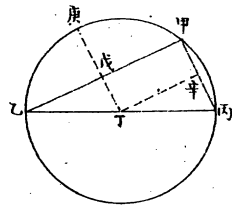
一 銳角形鈍角形並分二邊可得員心 銳角形員心在形內

鈍角形員心在形外

假如甲乙丙句股形求外切員

術任於句或股平分之作十字正線此線過弦線之點

即為員心



點並切員周而乙丁丙丁庚丁皆半徑

論曰若平分甲丙句於辛從辛作十字正線亦必至丁
故但任分其一邊即可得心

又論曰若依第一術先得丁心從丁心作直線與句平

如圖甲乙丙形以甲乙股平分於

戊從戊作庚丁正十字線至乙丙

弦即分弦為兩平分而丁即員心

從丁運規作外切員則甲乙丙三

行即此線能分股線為兩平分

如丁庚線與甲丙句平行過甲乙股即平分股

線于戊

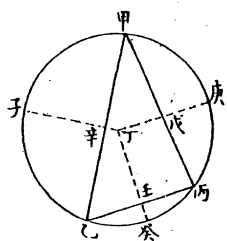
若與股平行而分句線亦然

如丁辛線與甲乙股平行即分句線于辛

右句股形外切平員之心在弦線中央

假如銳角形求形外切員

術任以兩邊各平分之作十字線引長之必相遇於一點即為員心



於丁以丁為心作員則甲乙丙三角並切員周而丁癸

如圖甲乙丙銳角形任以甲丙邊
平分之于戊作庚戊丁十字線又
任以乙丙邊平分之於壬作癸壬
丁十字線兩直線稍引長之相遇

丁庚皆半徑

論曰試於餘一邊再平分之作十字正線亦必會於此

點故此點必員心

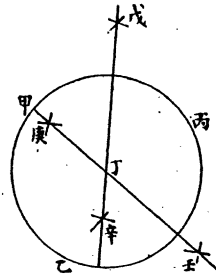
如甲乙邊再平分之于辛作子
辛丁十字線亦必相遇于丁點

右銳角形外切平員之心在形之內

右鈍角形外切平員之心在形之外

總論曰此與容員之法不同何也內容員之心即三角形之心故其半徑皆與各邊為垂線而不能平分其邊然從心作線至角即能分各角為兩平分此分角求心之法所由以立也外切員之心非三角形之心其心或在形內或在形外距邊不等而能以十字線剖各邊為兩平分此分邊求心之法所由以立蓋即三點串員之法也

附三點串員



有甲乙丙三點欲使之並在員周

術任以甲為心作虛員分用元度

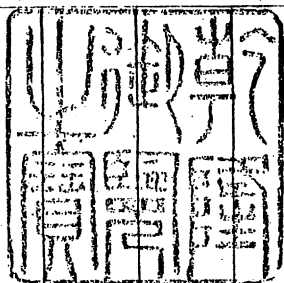
以丙為心亦作虛員分兩員分相

交於戊於辛作戊辛直線又任以

乙為心以丙為心各作同度之虛員分相交於庚於壬
作庚壬直線兩直線相遇於丁以丁為心作員則三點

並在員周

員周有三點不知其心亦用此法



歷算全書卷五十二